

Exercice 1 : Q.C.M. Indiquer la bonne réponse a , b , c avec la justification :

1. Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{\sqrt{2}^n}{10^5}$ alors

a) (u_n) converge vers 0 , b) (u_n) à pour limite $+\infty$ c) (u_n) n'a pas de limite .

2. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ égale : a) 0 b) $+\infty$ c) 1 .

3. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors : a) u_n est bornée b) $u_n \geq n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ c) $u_n \leq 1$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \cos n}{n + 1}$ est : a) 0 b) 1 c) -1 .

5. U une suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ alors U à pour limite : a- $\frac{1}{5}$ b- $\frac{1}{2}$ c- $+\infty$.

Exercice 2 : On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

- 1) En calculant leurs carrés, comparer les nombres : $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})$ et $2\sqrt{n}$
- 2) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
- 3) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (S_n) ?

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 5 - \frac{12}{U_n + 3}$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

c) Montrer que (U_n) est croissante .

2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que dont on précisera le premier terme et la raison .

b) Donner V_n et U_n à l'aide de n

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par $W_n = U_n - 3$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_{n+1}| \leq \frac{2}{3} |W_n|$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_n| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Exercice 4 : Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 2}$, pour tout entier n.

1) Montrer que la suite (U_n) est définie pour tout entier n et que $U_n > 0$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$

b) En remarquant que $\frac{U_n}{U_0} = \frac{U_n}{U_{n-1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \dots \times \frac{U_1}{U_0}$ démontrer que $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire une limite de U_n